Ondes dans un plasma peu dense, en l'absence ou en présence d'un champ magnétique stationnaire.

L'équation du mouvement d'un électron libre dans l'ionosphère soumise aux champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ d'une onde sinusoïdale s'écrit :

$$m \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e \left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right] - \lambda \overrightarrow{v}$$

Question 1 :

Commenter les différents termes de cette équation. Quel terme peut-on y négliger si le milieu est suffisamment peu dense ? Justifier que l'on peut négliger le terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ devant celui en $\overrightarrow{E}$.

On reconnaît le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement d'un électron. Au second membre figurent la force de Lorentz et une force de frottement fluide qui rend compte de façon phénoménologique de tous les phénomènes dissipatifs (chocs avec les particules neutres, essentiellement). Ce dernier terme peut être négligé dans un plasma peu dense où la probabilité d'un choc devient très petite.

De façon plutôt systématique, on verra que $\|\overrightarrow{B}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{E}\|}{V_\varphi}$ où V_φ est la vitesse de phase de l'onde, toujours proche de c, vitesse de la lumière dans le vide. On en déduit que

$$\frac{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\|}{\|\overrightarrow{E}\|} < \frac{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{B}\|}{\|\overrightarrow{E}\|} = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{V_\varphi} \ll 1$$

car la vitesse des électrons est faible devant celle de la lumière.

Question 2 :

L'ionosphère est un plasma qui contient n électrons par unité de volume et autant d'ions. Justifier que les ions ne contribuent pratiquement pas à la densité de courant et en déduire, en régime sinusoïdal, que $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$ avec : $\sigma = -\imath \frac{n e^2}{m \omega}$

Avec les approximations précédentes, on a, en régime sinusoïdal de pulsation ω :

$$m \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \imath \omega m \overrightarrow{v} = -e \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{\imath e}{m \omega} \overrightarrow{E}$$

Pour les ions, le même raisonnement conduit au même résultat en remplaçant $-e$ par e et m, masse de l'électron par M masse de l'ion, soit

$$\overrightarrow{v}_{ion} = -\frac{\imath e}{M \omega} \overrightarrow{E}$$

Les ions sont des ions O_2^+ ou N_2^+ de masse molaire 29 $\mathrm{g\,mol^{-1}}$ ce qui signifie que leur masse est, en gros, 29 fois celle d'un proton dont la masse est 1836 fois celle de l'électron ; donc $\frac{M}{m} \approx 29 \cdot 1836 \approx 50\,000$. Il en résulte que la vitesse des ions est négligeable et qu'on peut les considérer comme immobiles.

Puisque seuls les électrons contribuent à la densité de courant et que leur densité volumique de charge est $\rho = n\,(-e)$, on a

$$\overrightarrow{j} = \rho \overrightarrow{v} = -n e \frac{\imath e}{m \omega} \overrightarrow{E} = -\imath \frac{n e^2}{m \omega} \overrightarrow{E}$$

que l'on note donc $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$

Question 3 :

Etablir la relation de dispersion de ce milieu et montrer l'existence d'une pulsation de coupure. Calculer, en fonction de la pulsation, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Reportons ce dernier résultat dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\sigma\,\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(-\imath\,\frac{n\,e^2}{m\,\omega} + \imath\,\omega\,\varepsilon_0 \right) \overrightarrow{E}$$

Eliminons le champ électrique par un calcul classique

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\right) - \Delta\overrightarrow{B} = \imath\,\mu_0 \left(-\frac{n\,e^2}{m\,\omega} + \omega\,\varepsilon_0 \right) \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$$

Reportons-y $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\imath\,\omega\,\overrightarrow{B}$

$$-\Delta\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(-\frac{n\,e^2}{m} + \omega^2\,\varepsilon_0 \right) \overrightarrow{B}$$

et, avec $\mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1$, on en tire

$$\Delta\overrightarrow{B} + \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{n\,e^2}{m\,\varepsilon_0} \right) \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

soit, en notant $\frac{n\,e^2}{m\,\varepsilon_0} = \omega_p^2$

$$\Delta\overrightarrow{B} + \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \right) \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

pour une onde plane progressive en $\exp\imath(\omega\,t - k\,x)$, on a $\Delta\overrightarrow{B} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial x^2} = -k^2\,\overrightarrow{B}$; l'équation devient

$$-k^2\,\overrightarrow{B} + \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \right) \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

L'équation de dispersion est donc

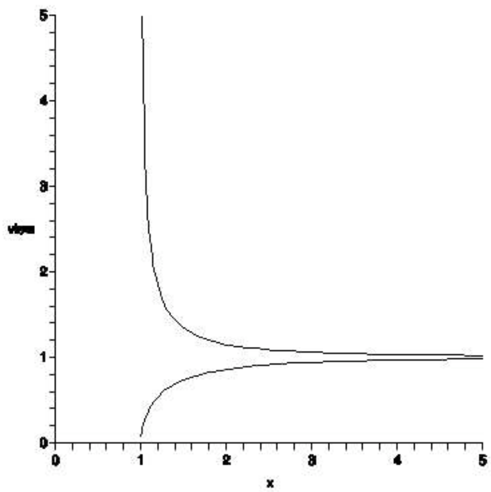
$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Pour $\omega < \omega_p$, k^2 est négatif donc k imaginaire pur, ce qui conduit à des ondes en $\exp(-|k|\,x)\,\cos(\omega\,t)$ qui est non propagative et d'amplitude décroissante ; on pourra parler d'onde *évanescente*.

Pour $\omega > \omega_p$, on a k réel et donc $V_\varphi^{-1} = \frac{k}{\omega}$ et $V_g^{-1} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}$, d'où

$$V_\varphi = c\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \qquad \text{et} \quad V_g = c\,\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

On trouvera ci-après les courbes donnant V_φ/c et V_g/c en fonction de ω/ω_p On pourra s'étonner que V_φ soit supérieure à c. Il n'y a pas de contradiction avec la théorie de la relativité ; celle-ci affirme qu'un point matériel ou un signal ne peuvent aller plus vite que la lumière dans le vide ; or notre onde n'est pas un point matériel et un signal suppose une modulation sur une porteuse et se propage donc à la vitesse de groupe.



De temps à autre, dans la presse scientifique, figurent à la une les exploits de chercheurs qui ont réussi à dépasser la vitesse de la lumière ; il s'agit toujours de vitesse de phase et ça n'a rien que de très banal et ne mérite nullement une annonce si tonitruante.

Question 4 :
ω_p s'appelle la pulsation plasma. Calculer sa valeur et celle de la fréquence correspondante, sachant que n est de l'ordre de $10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$ dans l'ionosphère.

On a

1. $n = 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$
2. $e = 1,6\,10^{-19}\,\mathrm{C}$
3. $m = 0,91\,10^{-30}\,\mathrm{kg}$
4. $\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9,0\,10^9\,\mathrm{SI}$ d'où $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}\,10^{-9}\,\mathrm{SI}$

On en tire que la fréquence plasma est de l'ordre de 9 MHz.

Question 5 :
Les résultats précédents s'accordent mal aux données expérimentales et l'on va désormais tenir compte du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T}$ supposé uniforme et stationnaire. Réécrire l'équation du mouvement d'un électron avec les mêmes approximations. A quelle condition peut-on négliger $m\,\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ devant $e\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_T}$? Quelle pulsation caractéristique apparaît ? Montrer que la densité de courant vérifie la relation $n\,e\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{B_T}$.

En ne perdant pas de vue que le champ de l'onde, noté $\overrightarrow{B}$ s'ajoute au champ terrestre préexistant, l'équation du mouvement devient

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,\left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_T}\right] - \lambda\,\overrightarrow{v}$$

Les approximations précédentes conduisent alors à

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,\left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_T}\right]$$

$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ a pour ordre de grandeur $m\,\omega\,v$ et $-e\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_T}$ a pour ordre de grandeur $e\,v\,B_T$. Le premier est négligeable devant le second si

$$\omega \ll \frac{e\,B_T}{m}$$

On reconnaît dans $\omega_c = \frac{e\,B_T}{m}$ la pulsation du mouvement hélicoïdal de l'électron dans un champ uniforme, on l'appelle *pulsation cyclotron*. Avec un champ magnétique dans l'ionosphère de l'ordre de $25\,\mu$T, la fréquence correspondante est de l'ordre de 750 kHz.

En négligeant donc l'accélération, on a donc successivement

$$\overrightarrow{0} = -e\left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_T}\right]$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_T}$$

$$n\,e\,\overrightarrow{E} = -n\,e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_T}$$

$$n\,e\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B_T} \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 6 :

Montrer que pour une onde en $\exp\imath(\omega\,t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM})$***, on a aussi*** $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E} = \omega\,\overrightarrow{B}$ ***et*** $-\imath\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j}$ ***. Préciser l'approximation commise.***

Avec ce type d'onde, $\frac{\partial E}{\partial t} = \imath\,\omega\,\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\imath\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}$ et de même pour $\overrightarrow{B}$ L'équation de Maxwell-Faraday devient

$$-\imath\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E} = -\imath\,\omega\,\overrightarrow{B}$$

soit

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E} = \omega\,\overrightarrow{B} \qquad \text{(équation 2)}$$

L'équation de Maxwell-Ampère devient

$$-\imath\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \imath\,\omega\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}\right)$$

Au vu de la question précédente j est de l'ordre de $n\,e\,E/B_T$, c'est le terme prépondérant si

$$\omega \ll \frac{n\,e}{\varepsilon_0\,B_T} = \frac{n\,e^2}{m\,\varepsilon_0}\,\frac{m}{e\,B_T} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$$

L'AN donne une fréquence associée à 100 Mhz, cette condition est donc vérifiée car on a déjà supposé que $\omega \ll \omega_c \sim 750\,\text{kHz}$. On a alors

$$-\imath\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j} \qquad \text{(équation 3)}$$

Question 7 :

Montrer, sans aucun calcul, que les propriétés de l'onde peuvent dépendre de sa direction de propagation. On se place dans le cas où $\overrightarrow{k} \,//\, \overrightarrow{B_T} \,//\, \overrightarrow{Oz}$ ***et l'on note dans la base*** $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ ***:*** $\overrightarrow{k} = k\,\overrightarrow{e_z}$***,*** $\overrightarrow{B_T} = B_T\,\overrightarrow{e_z}$ ***et*** $\overrightarrow{E} = E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y}$***. Trouver la relation de dispersion liant*** k***,*** ω ***et les constantes du problèmes.***

Le milieu n'est pas isotrope à cause de la présence du champ magnétique terrestre ; donc *a priori* les propriétés de l'onde dépendent de l'angle que fait la direction de propagation avec le champ magnétique terrestre. L'énoncé se place donc dans un cas particulier.

On reporte $\overrightarrow{E} = E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y}$ dans l'équation 2 et l'on tire

$$\overrightarrow{B} = \frac{k}{\omega}\,(E_1\,\overrightarrow{e_y} - E_2\,\overrightarrow{e_x})$$

que l'on reporte dans l'équation 3 d'où

$$\overrightarrow{j} = -\imath\,\frac{k^2}{\mu_0\,\omega}\,(-E_1\,\overrightarrow{e_x} - E_2\,\overrightarrow{e_y}) = \imath\,\frac{k^2}{\mu_0\,\omega}\,(E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y})$$

que l'on reporte enfin dans l'équation 1

$$n\,e\,(E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y}) = \imath\,\frac{k^2\,B_T}{\mu_0\,\omega}\,(-E_1\,\overrightarrow{e_y} + E_2\,\overrightarrow{e_x})$$

$$E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y} = \imath\,\frac{k^2\,B_T\,\varepsilon_0\,c^2}{n\,e\,\omega}\,(-E_1\,\overrightarrow{e_y} + E_2\,\overrightarrow{e_x})$$

$$E_1\,\overrightarrow{e_x} + E_2\,\overrightarrow{e_y} = \imath\,\frac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega}\,(-E_1\,\overrightarrow{e_y} + E_2\,\overrightarrow{e_x})$$

en reprenant les notations précédentes.

En projetant sur les axes, on obtient le système

$$\begin{cases} E_1 - \imath\,\dfrac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega}\,E_2 = 0 \\ \imath\,\dfrac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega}\,E_1 + E_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(système 4)}$$

Si l'on considère ce système comme un système de deux équations linéaires homogènes en (E_1, E_2) où k et ω sont deux paramètres, il admet en général une solution unique et celle-ci est bien évidemment $(E_1, E_2) = (0, 0)$, ce qui correspond à une onde d'amplitude nulle, c'est-à-dire à pas d'onde du tout. Pour avoir d'autres solutions, il faut donc que le déterminant soit nul et cette condition n'est rien d'autre que la relation de dispersion recherchée car elle porte sur k et ω. Donc

$$\begin{vmatrix} 1 & -\imath\,\frac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega} \\ \imath\,\frac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\frac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega}\right)^2 = 0$$

d'où

$$k^2 = \pm\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}$$

Question 8 :

Montrer que $E_2/E_1 = \pm\,i$ et interpréter. Montrer que sur ces deux valeurs, une seule en fait correspond à une onde progressive ; en calculer les vitesses de phase et de groupe. Que se passe-t-il si l'on envoie du sol une onde polarisée rectilignement en direction de l'ionosphère ? Expliquer la très longue portée des ondes radio dans certaines plages de fréquences.

A partir du système 4, on tire $E_2/E_1 = -\imath\,\frac{k^2\,\omega_c\,c^2}{\omega_p^2\,\omega}$. Or $k^2 = \pm\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}$ donc $E_2/E_1 = \pm\,i$. Interprétons

$$\overrightarrow{E} = \mathfrak{Re}\,[E_1(z,t)\,\overrightarrow{e_x} + E_2(z,t)\,\overrightarrow{e_y}] = \mathfrak{Re}\,[E_1(z,t)\,(\overrightarrow{e_x} \pm \imath\,\overrightarrow{e_y})]$$

$$\overrightarrow{E} = \mathfrak{Re}\left[\underline{E_1}\,\exp\imath(\omega\,t - k\,z)\,(\overrightarrow{e_x} \pm \imath\,\overrightarrow{e_y})\right]$$

soit avec $\underline{E_1} = E_m\,\exp\imath\varphi$

$$\overrightarrow{E} = E_m\,[\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,\overrightarrow{e_x} \pm \sin(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}]$$

où l'on reconnaît une polarisation circulaire.

La polarisation circulaire indirecte correspond à $k^2 = -\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}$ soit $k = \pm\imath\sqrt{\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}}$ donc à des ondes en

$$\mathfrak{Re}\,[\exp\imath[\omega\,t - k\,z)] = \exp\left(\pm z\sqrt{\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}}\right)\,\cos(\omega\,t)$$

qui sont des ondes stationnaires d'amplitude décroissante (seules physiquement acceptables), donc des ondes *évanescentes*.

La polarisation circulaire directe donne des ondes non amorties (k est réel) ; pour celles se propageant dans le sens de Oz, on a

$$k = \sqrt{\frac{\omega\,\omega_p^2}{\omega_c\,c^2}}$$

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\,\sqrt{\frac{\omega\,\omega_c}{\omega_p^2}}$$

$$V_g = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = 2\,c\,\sqrt{\frac{\omega\,\omega_c}{\omega_p^2}} = 2\,V_\varphi$$

Si l'on envoie vers l'ionosphère un onde polarisée rectilignement qui peut être décomposée en somme de deux ondes polarisées circulairement, la composante indirecte qui véhicule la moitié de l'énergie et ne peut se propager dans l'ionosphère, est totalement réfléchie et l'autre est partiellement réfléchie, partiellement transmise. L'ionosphère se comporte comme un miroir qui renvoie l'onde vers le sol et permet une propagation au-delà de l'horizon.